

Пространственные модели.

27/01

Модель распространения газового облака

Такая модель важна д/экологии.

И процесс выброса вредных газов, необход. опред-ть радиус пораженной зоны, а также время, за к облако достигнет заданный район. В случае безветренной погоды, когда распространение газа происходит за счет конвективной диффузии. Это процесс не обычной молекулярной

диффузии, а процесс переноса газа за счет турбулентности воздуха, а также конвективных процессов в воздухе. Однако этот турбулентный характер можно учесть увеличенным знач-м коэфф-та диффузии.

□ источник газа точечный и нах-ся на высоте z_0 от поверх-ти Земли. Концентрация газа $u(x, y, z, t)$ ав-ся реш-м ур-а диффузии:

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = D \Delta u + Q \delta(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$-\infty < y < +\infty, 0 < z < +\infty, t > 0, (\pm)$ где D - коэфф-т турбулентной диффузии; Q - масса газа, выброшенная в элемент $t=0$, т.е.

$$\lim_{V_0 \rightarrow 0} \frac{1}{V_0} \iiint_{V_0} u(x, y, z, t=0) d\sigma = Q, \quad \text{где } V_0 - \text{шар с центром в т. } M_0 (x=0, y=0, z=z_0) \text{ и радиусом } \rho_0 < z_0.$$

На земной пов-ти должно вып-ся гранич.

усл-е $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ при $z=0$ (2)

Реш-е представленной зад д/однородно-го поппр-ва имеет вид:

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q}{8(\sqrt{\pi A t})^3} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\tau)^2}{4At}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\tau)^2}{4At}} \right) \delta(\tau) \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\tau - z_0) d\xi d\eta d\tau$$

$$= \frac{Q}{8(\sqrt{\pi A t})^3} \left(e^{-\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{4At}} + e^{-\frac{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}{4At}} \right)$$

Сокращательно имеем.

$$u(x, y, z, t) = \frac{Q}{8(\sqrt{\pi A t})^3} \left(e^{-\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{4At}} + e^{-\frac{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}{4At}} \right) \quad (3)$$

Мы будем $\times$ распространение газа вдоль земной пов-ти ($z=0$). Тогда получим $u(x, y, z=0, t) = \frac{Q}{4(\sqrt{\pi A t})^3} e^{-\frac{x^2 + y^2 + z_0^2}{4At}}$ или

$$u(\rho, t) = \frac{Q}{4(\sqrt{\pi A t})^3} e^{-\frac{\rho^2}{4At}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} \quad (4)$$

Отметим, что на земной пов-ти кону-ция увеличивается.

Если допустимая (безопасная) кону-ция газа $= u^*$, то имеем согласно (4), границу зоны безопасности $\rho \geq l$, где l явл-ся радиусом

$$\frac{Q}{4(\sqrt{\pi A t})^3} e^{-\frac{l^2}{4At}} = u^* \quad (5)$$

Откуда находим $l = \sqrt{4At \ln \frac{Q}{4u^*(\sqrt{\pi A t})^3}}$ (6)

Из (6) легко определить $\max l$, т.е. радиус зоны макс-го поражения. А/этого представим (6) в виде $l^2 = \pi D t \ln \frac{Q}{H U^* (\sqrt{\pi D t})^3}$ (7)

Откуда имеем: $\frac{dl^2}{dt} = \pi D \ln \frac{Q}{H U^* (\sqrt{\pi D t})^3} - 6D = 0$

Откуда получаем ур-ние $Q/t_{\max}$, при l достигает своего макс знач-я:

$$\ln \frac{Q}{H U^* (\sqrt{\pi D t})^{3/2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow Q = H U^* (\sqrt{\pi D t})^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_{\max} = \frac{1}{\pi D e} \left(\frac{Q}{H U^*} \right)^{2/3} \quad (8)$$

Подставив (8) в (6), находим $l_{\max} = \sqrt{6 D t_{\max}}$

$$\Leftrightarrow l_{\max} = C \sqrt[3]{\frac{Q}{U^*}}, \text{ где } C = \sqrt[3]{2} \sqrt{\frac{3}{2 \pi e}} \approx 0,5 \quad (10)$$

Заметим, что радиус поражения пропорционален $\sqrt[3]{Q}$, т.е. Q /увеличения радиуса в 8 раз, надо увеличить массу взрыва в 8 раз.

Время t_0 , при l зона опасности исчезнет, опред-ся из усл-я $H \pi \sqrt{\pi} U^* (D t_0)^{\frac{3}{2}} = Q$

$$\text{Откуда имеем } t_0 = \frac{1}{\pi D} \left(\frac{Q}{H U^*} \right)^{2/3} \quad (11)$$